Bem 1.27: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X kann man durch die *Verteilungsfunktion*

$$F(x) := P(X \leq x) \qquad (1.4.3)$$

eineindeutig Begriff erklären erklären.
Die Wahrscheinlichkeit anderer Ereignisse ergibt sich aus dem (geeignet verallgemeinerten) dritten Kolmogorovschen Axiom.
Es gilt dann

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \qquad (1.4.4)$$

denn (kleine Übung zum Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten)

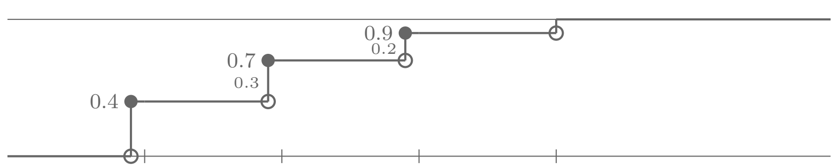
Die Ereignisse $\{X \leq a\} = \{\omega | X(\omega) \leq a\}$ (Ereignis, dass ich eine Person ziehe mit Einkommen $\leq a$; oder Haushaltsgröße), $\{a < X \leq b\}$ und $\{X > b\}$ sind disjunkt und ergeben in ihrer Vereinigung Ω.
Also ist
(geschweifte Klammern oft weglassen)

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) + P(X > b) \\ &\Leftrightarrow 1 - P(X \leq a) - P(X > b) = P(a < X \leq b) \\ &\Leftrightarrow P(X \leq b) - P(X < a)) = P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

Bsp 1.28: Fortsetzung von Bsp 1.26
Text: Haushaltsgrößen
P({X=1})=0.4
P({X=2})=0.3
P({X=3})=0.2
P({X=4})=0.1

Berechne die Verteilungsfunktion und zeichne sie.

1. $x < 1$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X < 1) = 0$
2. $x = 1$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 1) = 0.4$
3. $1 < x < 2$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 1) + P(1 < X \leq x = P(X \leq 1) = 0.4$
4. $x = 2$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 1) + P(X = 2) = 0.4 + 0.3 = 0.7$
5. $x \leq 2$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 2) = 0.7$
6. $2 < x < 3$:
   $F(x) = P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(X = 3) = 0.7 + 0.2 = 0.9$
7. $3 < x < 4$:
   $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 3) = 0.9$
8. $x = 4$:
   $F(x) = P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + P(X = 4) = 1$
9. $x > 4$:
   $F(x) = P(X \leq x) = 1$



Man sieht generell:
$P(X = x)$ ist genau die Sprunghöhe der Verteilungsfunktion im Punkt x.

Bsp 1.29: Fortsetzung von Bsp 1.26

Berechne: $P(2.5 < X \leq 3.5)$
$P(1 < X \leq 3)$
$P(1 \leq X \leq 3)$

$$\begin{aligned} P(2.5 < X \leq 3.5) &= F(3.5) - F(2.5) \\ &= F(3) - F(2) \\ &= 0.9 - 0.7 = 0.2 \end{aligned}$$

$$P(2.5 < X \leq 3.5) = P(X = 3) = 0.2$$

$$\begin{aligned} P(1 < X \leq 3) &= F(3) - F(1) \\ &= 0.9 - 0.4 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(0 < X \leq 3) \\ &= F(3) - F(0) = 0.9 \end{aligned}$$

1.4.3 Stetige Zufallsvariablen

hier nur „mathematisch unsauber“ die Grundidee:

Zufallsvariable $X: \ \Omega \longrightarrow \Omega_X = \mathbb{R}$

Jetzt: Ω und Ω_X überabzählbar grausam unendlich

Vorstellung (vgl. oben): Auswertung eines *stetigen* Merkmals $\tilde{X}$ an zufällig ausgewählter Person aus einer *unendlich* großen Grundgesamtheit. Stetige ZV-len sehr wichtig; später wird fast ausschließlich damit gerechnet. Approximationsergebnisse für größere Stichprobenumfänge, vieles wird einfacher, auch wenn man es zunächst nicht glaubt

Problem: Wahrscheinlichkeit, genau einen bestimmten Wert x (z.B. Haushaltseinkommen=179385.17) zu erhalten ist Null!

(stetiges Merkmal, beliebig große Messgenauigkeit)

$$P_X(\{x\}) = 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \tag{1.4.5}$$

Hierdurch ist kein Wahrscheinlichkeitsmaß festlegbar, man muss anders vorgehen.