Bsp. 2.18a

Eine Maschine füllt Gummibärchen in Tüten ab, die laut Aufdruck 250g Füllgewicht versprechen. Wir nehmen im folgenden an, dass das Füllgewicht normalverteilt ist. Bei 16 zufällig aus der Produktion herausgegriffenen Tüten wird ein mittleres Füllgewicht von 245g und eine Stichprobenstreuung (Standardabweichung) von 10g festgestellt.

a) Berechnen Sie ein Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht zum Sicherheitsniveau von 95%.

b) Wenn Ihnen zusätzlich bekannt würde, daß die Stichprobenstreuung gleich der tatsächlichen Streuung ist, wäre dann das unter a) zu berechnende Konfidenzintervall für das mittlere Füllgewicht breiter oder schmäler?
Begründen Sie ihre Antwort ohne Rechnung.

- Maschine: Füllgewicht normalverteilt, $\mu = 250$ g
- 16 Tüten gezogen $\Rightarrow n = 16$
- mittleres Füllgewicht: $\bar{x} = 245$ g
- Stichprobenstreuung: $s = 10$ g.

a) Konfidenzintervall
Da Varianz $\sigma^2$ unbekannt, Formel (2.3.3) verwenden:

$$[\bar{X} \pm t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

$\gamma$ = Sicherheitsniveau = 0.95
$\Rightarrow \frac{1+\gamma}{2} = 0.975$
Nachschauen in t-Tabelle bei 0.975 und "$n = 15$" ($T = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$ ist t-verteilt mit $n$-1 Freiheitsgeraden) liefert 2.13.

**Konfidenzintervall**: Nach Einsetzen:
$[245 \pm 2.13 \cdot \frac{10}{4}] = [\mathbf{239.675}; \mathbf{250.325}]$

b) Jetzt ist auch $\sigma$ bekannt.
Man kann mit dem Konfidenzintervall aus (2.3.2) rechnen:

$$[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Da jetzt $\sigma$ bekannt, ist die Unsicherheit geringer und damit das Konfidenzintervall schmäler.
In der Tat ist $z_{\frac{1+\gamma}{2}} < t_{\frac{1+\gamma}{2}}$.
(Rechnerisch ergäbe sich mit $z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$ :
$[240.100; 249.900]$.)

## Approximative Konfidenzintervalle

Ist der Stichprobenumfang groß genug, so kann wegen des zentralen Grenzwertsatzes die Formel (2.3.2) auf beliebige Merkmale (mit existierender Varianz) angewendet werden und erhält approximative Konfidenzintervalle.
Insbesondere:

Bsp 2.18b Konfidenzintervall für den Anteil $\pi$
Situation $X_1, \dots X_n$ i.i.d. mit

$$X_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} , \quad P(X_i = 1) = \pi.$$

z.B. Wahlumfrage: Intervall angeben, das mit 95% Sicherheit den wahren Anteil $\pi$ der rot-grün Wähler überdeckt.
Es gilt:

$$\mathbb{E}(X_i) = \pi$$

$$Var(X_i) = \pi \cdot (1 - \pi)$$

$\longrightarrow \mathbb{E}(\bar{X}) = \pi$, $Var(\bar{X}) = \dfrac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}$
und approximativ für großes $n$:

$$\frac{\bar{X} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Jetzt $\pi$ im Zähler und im Nenner: etwas inkonsequent im Nenner $\pi$ schätzen durch $\bar{X}$

$$P\left( -z_{\frac{1+\gamma}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \pi}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \leq z_{\frac{1+\gamma}{2}} \right) = \gamma$$

$$P\left(\bar{X} - z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq \pi \leq \bar{X} + z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right) = \gamma$$

also Konfidenzintervall:

$$\left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right] \qquad (2.3.4)$$

<u>Bsp. 2.19</u> Wahlumfrage

$n = 500$, $\bar{X} = 46.5\%$ (Anteil rot-grün Wähler), $\gamma = 95\%$
$z_{\frac{1+\gamma}{2}} = 1.96$
Konfidenzintervalle:

$$\begin{aligned} \left[\bar{X} \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right] &= \left[0.465 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.465(1-0.465)}{500}}\right] \\ &= [0.421; 0.508] \end{aligned}$$