Einleitung

Grundaufgabe der induktiven Statistik und Überblick über die Veranstaltung

a) Deskriptiv versus induktiv

bisher: Statistik I: deskriptive Statistik:

- statistische Beschreibung einer Gesamtheit (Grundgesamtheit oder Stichprobe)
- keine Verallgemeinerung von einer Stichprobe auf die zugehörige Grundgesamtheit angestrebt

jetzt: induktive Statistik:

- Induktion: Schluss vom Teil auf das Ganze, von vielen Einzelbeobachtungen auf allgemeine Gesetze
- hier: Schluss von der Stichprobe auf Eigenschaften der Grundgesamtheit (*„Inferenz“*)
- Stichprobe nur Mittel zum Zweck, nur als „Informant“ über die Eigenschaften der Grundgesamtheit interessant.

b) Typische Beispiele: Wahlumfrage // Sozio-ökonomisches Panel

- Grundgesamtheit: Alle Wahlberechtigten bei der nächsten Bundestagswahl // Wohnbevölkerung
- Stichprobe: 1000 „repräsentativ ausgewählte“ Wahlberechtigte // mehrere tausend Haushalte
- gesucht: Information über *alle* Wahlberechtigten // alle Bundesbürger, also die *Grundgesamtheit*

c) Typische Fragestellungen der induktiven Statistik (Gliederung)

I)
* Wie groß ist der Anteil der rot-grün-Wähler unter den Wahlberechtigten; wie groß ist das durchschnittliche Nettohaushaltseinkommen?
* ⟶ Kap. 2.2: **Punktschätzung**
* Wie erhält man aus der Stichprobe gute Schätzwerte für Charakteristika („Parameter“) der Grundgesamtheit?
* Wann ist ein Schätzverfahren gut/besser als ein anderes?

II)
* ⟶ Kap. 2.3: **Bereichsschätzung** (meist ein Intervall)
* Idee: gib einen Bereich an, „der den wahren Anteil der rot-grün-Wähler praktisch sicher enthält“, z.B. $[48\%, 51\%]$
* ungenauere Aussagen, dafür aber zuverlässiger

III)
* Überprüfe aus substanzwissenschaftlicher Theorie abgeleitete Hypothesen über die Grundgesamtheit anhand der Daten:
* Stimmt es, dass der Anteil der CDU/CSU Wähler unter den Wahlberechtigten mit starker Kirchenbindung größer ist als unter den Kirchenfernen?
* Stimmt es, dass das Nettoerwerbseinkommen pro Arbeitsstunde bei den Frauen geringer ist als bei den Männern?
* ⟶ Kap. 2.4: **Hypothesentests**

IV)
* Modelle für Zusammenhang/Einfluss von Variablen
* ⟶ Kap. 2.5: **Regressionsmodelle**
* Welche persönlichen Merkmale beeinflussen die Wahlentscheidung besonders stark?
* Welche Voraussetzungen erleichtern die Integration von Ausländern?

V)
* ⟶ **Ausblick** (falls noch Zeit)
* Ereignisanalyse → dynamisches Modell:
  Was beeinflusst die Chancen Erwerbsloser auf die erfolgreiche Rückkehr in den Arbeitsmarkt?
* multivariate Verfahren (z.B. Clusteranalyse): Welches sind die ausgeprägten Grundtypen von Lebensstilen?

d) Inferenzfehler

- **Zentrales Problem**:

  Jeder Induktionsschluss ist potentiell fehlerbehaftet (der Teil ist eben nicht das Ganze; eine Verallgemeinerung kann nicht umfassend sein)

- etwa: Anteil der rot-grün-Wähler nicht exakt vorhersagbar

- Entscheidende Idee: Mit dem Fehler leben, d.h. den unvermeidlichen Fehler kontrollieren

- Methode:

  * Stichprobenziehung **zufällig**
  * verwende Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Quantifizierung/Kontrolle des Fehlers
    $\longrightarrow$ Kap. 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung
    $\longrightarrow$ Kap. 2: Wie nutzt man Wahrscheinlichkeitsüberlegungen für die Statistik?

e) Zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kap. 1.1 bis 1.6: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wichtige Verteilungsmodelle

- m.E.: Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht nur Hilfsmittel!

- **These**: Gerade für Sozialwissenschaftler ist probabilistisches Denken (d.h. Denken in Wahrscheinlichkeiten) unerlässlich! „Herbert George Wells, der Autor der Zeitmaschine, hat einmal gesagt, dass eine funktionierende Demokratie mündige Bürger braucht, die neben Lesen und Schreiben auch statistisches Denken gelernt haben.“[1]

- (Mir) ganz wichtiger Punkt: Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

---

[1] Aus: U. Hoffrage (Max-PLank-Insitut für Bildungsforschung, Berlin) *Irren ist wahrscheinlich. Medizinische Experten und Laien bewerten Risiken oft falsch.* In: „einblick“, Zeitschrift des deutschen Krebsforschungszentrums, Heft 1/1999.
siehe auch:
http://www.brustkrebs-info.de/patienten-info/index.php?datei=patienten-info/mammographie-screening/hoffrage_einblick1-99.htm

Kap. 1.7: Unabhängigkeit und identische Wiederholungen, Grenzwertsätze und Approximation

Bei sehr großen Stichprobenumfängen wird vieles einfacher und regelmäßiger.
Für Soziologie wichtig, da oft umfangreiche, standardisierte Befragungen
Z.B. Hauptsatz der Statistik $\approx$ „Je größer der Umfang (einer reinen Zufallsauswahl), desto repräsentativer wird die Stichprobe für die Grundgesamtheit“
Gesetz der großen Zahl: Unter gewissen Bedingungen pendelt sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses gegen seine Wahrscheinlichkeit ein.

Kap. 1.8: Mehrdimensionale Zufallsvariablen – probabilistische Modellierung von Zusammenhängen

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wichtige Verteilungsmodelle

1.0 Mengen und elementare Mengenoperationen

Für Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz wichtig: Rechnen mit Mengen

1.0.1 Mengen

Informelle Definition:
Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen.
Jedes einzelne Objekt heißt *Element*.

Bsp:

- Menge der Hörer einer Vorlesung
- Menge der Ergebnisse eines Würfelwurfs
  übliche Schreibweise: $\underset{\uparrow}{\{}1, 2, 3, 4, 5, 6\underset{\uparrow}{\}}$
  Mengenklammern

  Die Reihenfolge der Aufzählung spielt (im Gegensatz zu Tupeln) keine Rolle: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \;=\; \{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$
  Jedes Element wird nur einmal genannt.

- Charakterisierung von Mengen mit einer gewissen Eigenschaft
  z.B. $\{1, 2, 3, \ldots, 10\} = \{x \,|\, x \text{ ist eine natürliche Zahl } \leq 10\}$
  Lies: Die Menge aller x mit der Eigenschaft „x ist $\ldots \leq 10$“.

- Standardmengen:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen} \\
\mathbb{N}_0 & = & \{0, 1, 2, \ldots\} & \text{Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0} \\
\mathbb{Z} & = & \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} & \text{Menge der ganzen Zahlen} \\
\mathbb{R} & & & \text{Menge der reellen Zahlen} \\
\emptyset & & & \text{leere Menge}
\end{array}
$$

Laufendes Bsp:

$$
\begin{array}{lcl}
\Omega & = & \{\text{CDU, CSU, SPD, FDP, Bündnis 90/Grüne, PDS/WASG, sonstige}\} \\
A & = & \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Bündnis 90/Grüne}\} \\
B & = & \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP}\} \\
C & = & \{\text{SPD, FDP, Bündnis 90/Grüne}\}
\end{array}
$$

1.0.2 Mengenoperationen und Notationen

1. Elementeigenschaft, z.B.
   x ist Element der Menge M: $x \in M$
   x ist nicht Element der Menge A: $x \notin A$

2. M_1 ist Teilmenge von M_2:
   $M_1 \subset M_2$ (oft auch: $M_1 \subseteq M_2$)
   Wenn jedes Element von M_1 auch Element von M_2 ist.

graphische Darstellung der Lage von Mengen zueinander:
Venn-Diagramm
„trivial, aber hilfreich“

generell im Venn-Diagramm:

Für jede Menge M gilt:

$\emptyset \subset M$, Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, denn jedes Element in $\emptyset$ ist in M
(Aussagen über den leeren Quantor sind wahr)

$M \subset M$, d.h. „ $\subset$ “ enthält implizit „ $=$ “, ⚠
deshalb in Literatur oft auch $\subseteq$ statt $\subset$

3. Die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1 *und* in M_2 sind.

$$\text{Notation: } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n =: \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Für jede Menge M gilt:

$$\begin{aligned} M \cap M &= M \\ M \cap \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$

Zwei Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, d.h. zwei Mengen, die kein gemeinsames Element haben, heißen disjunkt (elementfremd). (Begriff kommt immer wieder.)

4. Die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1 oder M_2 sind.

$$\text{Notation: } M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n =: \bigcup_{i=1}^{n} M_i$$

⚠ Vorsicht: dieses „oder“ ist nicht exklusiv gemeint, also nicht „entweder oder“, sondern in M_1 oder in M_2 oder in beidem.

5. Die Differenzenmenge $M_1 \backslash M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 sind.

6. Die Komplementärmenge $\overline{M}$ (mehrere Schreibweisen: $M^C, \mathcal{C}M$) bezüglich einer Grundmenge Ω ist die Menge aller Elemente von Ω, die nicht in M sind.

7. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M.
   Im Beispiel:

   $\mathcal{P}(B) \;\; =$

8. Die Mächtigkeit $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente von M
   Im Beispiel: $|B| \; = \; 3$

1.0.3 Rechenregeln für Mengen A, B, C

a) Kommutativgesetze : $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$

b) Assoziativgesetze : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

c) Distributivgesetze : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

Veranschaulichung (kein Beweis) im Venn-Diagramm:

d) De Morgansche Regeln : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

e) Aus $A \subset B$ folgt : $\overline{B} \subset \overline{A}$.

f) Für die Differenzmenge $A \backslash B$ gilt : $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

g) Für die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ gilt : $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

1.0.4 Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen
$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_k\}$
$B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots b_m\}$

ist die Menge $A \times B := \Big\{(a_i, b_j) \;\Big|\; i = 1, \ldots k, j = 1, \ldots m\Big\}$,

„also alle möglichen Kombinationen“

$$\begin{aligned} A \times B \;\; = \;\; & \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), \ldots (a_1, b_m), \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), \ldots (a_2, b_m), \\ & \quad \vdots \\ & (a_k, b_1), (a_k, b_2), (a_k, b_3), \ldots (a_k, b_m)\} \end{aligned}$$

Es handelt sich um Tupel, die Reihenfolge ist wichtig!

$$\begin{aligned}
\text{z.B.} \qquad & A = \{1,2,3\} \\
& B = \{1,2,3,4\} \\
A \times B \quad = \quad & \big\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),\dots\big\}
\end{aligned}$$

z.B. $(1,2)$ ist etwas anderes als $(2,1)$!
Allgemeiner:

- mehrere Mengen
- $A \times B \times C \times \dots; \quad \mathop{\times}\limits_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$
- Die zugrundeliegenden Mengen müssen nicht endlich sein.
- Anwendung: Kap. 1.3 (Aufbau komplexer Experimente aus Einzelexperimenten)

1.1 Grundlegendes zum Begriff „Wahrscheinlichkeit“

Literatur: Thema in fast allen Lehrbüchern kurz angerissen. Ausführlicher und weiterführend:

- Rohwer, G., Pötter, U. (2002): *Wahrscheinlichkeit, Begriff und Rhetorik in der Sozialforschung.* Juventa, Weinhein und München.
- Schneider, I. (Hg.) (1988): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeit von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Weichselberger, K. (2001): *Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung I. Intervallwahrscheinlichkeit als umfassendes Konzept.* Physika, Heidelberg S. 30-63.

a) Wahrscheinlichkeit in der Alltagssprache

- Stark gebräuchlich in der Umgangssprache als graduelle Abschwächung von Sicherheit („wahrscheinlich kommt Max“). Weg vom simplen Ja/Nein.
- Teilweise sogar quantifiziert:
  „Die Niederschlagswahrscheinlichkeit für morgen beträgt 30%“
- Medizinische Beipackzettel „seltene Nebenwirkungen“

b) Klassische Aspekte und Meilensteine

- <u>Wahrscheinlichkeit im Glücksspiel, v.a. Würfelspiel</u>

  * Profanisierung erst im Mittelalter, dort erst als Zufall gedeutet, vorher Gottesurteil etc.
  * Cardano (1501-1576)
  * Gallilei (1546-1642)
  * Briefwechsel zwischen Pascal (1623-1662) und Fermat (1601-1665), erste systematische Wahrscheinlichkeitsrechnung: Lösung für Frage, wie Einsätze gerecht aufzuteilen sind, wenn Spiel unterbrochen wurde
  * Huygens (1629-1695)

- Wahr-schein-lichkeit (Prove-ability → probability)

  * vielleicht bis zu den Skeptikern zurück
  * Mittelalter: Probabilismus in Theologie
  * Wahrscheinlichkeitsrechnung als Disziplin der Philosophie (Leibniz), Einbettung in ein System der „universellen Logik“

- Port-Royal-Logik (1662)

  Kloster der Jansenisten, Arnauld und Nicole, wohl auch Pascal; erstmaliges Zusammenwirken

  * der Philosophie des Unsicheren und
  * der Mathematik der Glücksspiele

- Jacob Bernoulli (1654 - 1705)

  Binomialverteilung. Theorem von Bernoulli: durch genügend große Versuchsreihen kann der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit beliebig gering gemacht werden .

- Wahrscheinlichkeiten als Ausdruck göttlicher Ordnung

  * de Moivre (1667 - 1754), Entdecker der Normalverteilung
  * Süssmilch (Bevölkerungsstatistik) ⟶ Objektivismus

- Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff
  (kombinatorischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)

  * Laplace (1749 - 1827)
  * Aufbauend auf Symmetrieüberlegungen

Beispiel: Wurf eines fairen Würfels

Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: „Es wird eine gerade Zahl gewürfelt“

* Erfolgreiche Anwendung v.a. auf Glücksspiele, in der Physik (stochastische Mechanik) und in der Stichprobentheorie bei einer reinen Zufallsauswahl: Dort hat jedes Element dieselbe Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden. Wählen z.B. 40% der N Mitglieder der Grundgesamtheit die Partei A, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer reinen Zufallsauswahl einer Einheit einen Wähler der Partei A zu erhalten:

  $$\frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der insgesamt möglichen Fälle}} = \frac{0.4 \cdot N}{N} = 0.4\,.$$

  Bei reiner Zufallsauswahl übertragen sich also die Häufigkeitsverhältnisse der Grundgesamtheit direkt in die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stichprobe (und können somit einfach „gelernt“ werden). (Siehe später Bsp. 1.3.)
* Intuitiv einleuchtend, aber beschränkte Anwendbarkeit: Essentielle Voraussetzung:

* Von Laplace generell angewendet auf beliebige Unsicherheitssituationen (Sonnenaufgang, Jurisprudenz)
* Laplace strenger Determinist (Laplace'scher Dämon!): Unsicherheit entsteht allein durch unvollständiges und ungenaues Wissen über die Anfangsbedingungen

c) Aktuelle interpretatorische Hauptrichtungen // typische Wahrscheinlichkeitsbegriffe

1. Objektivistisch // frequentistische Richtungen // aleatorische Wahrscheinlichkeiten

   - Anschluss an die göttliche Ordnung
   - Wahrscheinlichkeiten beschreiben tatsächlich vorhandene, zufällige Gesetzmäßigkeiten
   - Objektbezogen: Wahrscheinlichkeit ist eine Eigenschaft des untersuchten Objekts (z.B. Würfel), objektiv $\longleftrightarrow$ objektbezogen (wie z.B. spezifisches Gewicht, Länge)
   - Häufigkeitsinterpretation bzw. sogar -Definition (von Mises, 1883 - 1953): Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeiten in „unendlich langen“ reproduzierbaren Experimenten
   - natürliche Häufigkeiten (Gigerenzer, MPI für Bildungsforschung)
     * einfachere Kommunikation von Wahrscheinlichkeiten und Risiken, reduziert Fehler beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
     * T.A.: „Superrepräsentative Stichprobe vorstellen“, in der sich genau die Häufigkeitsverhältnisse in der Grundgesamtheit wiederfinden, z.B. 10 000 Personen
     * Dann $p(A) = 0.1756$ vorstellen als: 1756 Personen haben die Eigenschaft A. (Aber man weiß natürlich nicht, welche 1756 Personen.)
     * „mathematisch triviale Umformung“, aber erfolgreich: Experimente mit Ärzten zeigen, dass die Darstellungsform (Wahrscheinlichkeiten vs. natürliche Häufigkeiten) einen starken Einfluss auf die Korrektheit von Berechnungen hat.
     * T.A.: Gefahr der Verschleierung von Unsicherheit: exakte superrepräsentative Stichproben sind praktisch unmöglich.

2. subjektivistische Richtungen

   - Wahrscheinlichkeit hat ausschließlich mit Unsicherheit, nicht mit Zufälligkeit zu tun (vgl. Laplace) (man kann auch über völlig deterministische Aspekte unsicher sein.)

- Wahrscheinlichkeitsbewertung ist Eigenschaft des untersuchten Subjekts
  $\Longrightarrow$ verschiedene Subjekte können durchaus zu unterschiedlichen Bewertungen kommen.
- behaviouristischer Standpunkt: Wahrscheinlichkeiten äußern sich im Verhalten
  z.B. bei Wetten $\Longrightarrow$ Wettdefinition / -Interpretation
- Bsp: Wird die Regierungskoalition die gesamte Legislaturperiode halten?
- Wahrscheinlichkeit von $A = p(A) = 0.3$ bedeutet gedanklich:

- Wichtig: subjektiv sind die Bewertungen, nicht die Rechenregeln. Kohärenzkriterien!

3. logischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
   - Wahrscheinlichkeit kommt Schlüssen zu: Wahrscheinlichkeit als logischer Grad mit dem aus einer Prämisse auf die Konklusion geschlossen werden darf (frühere Formalisierungsversuche gelten heute als gescheitert; aber Renaissance der Thematik)
4. („kalter“) mathematisch formaler Wahrscheinlichkeitsbegriff
   - Axiomatik von Kolmogorov
     siehe nächstes Kapitel
   - typische Anwendung der axiomatischen Methode:
     Hilbert: Axiomatisierung in der Mathematik
     Axiom: Nicht bezweifelte Grundannahme für Kalkül