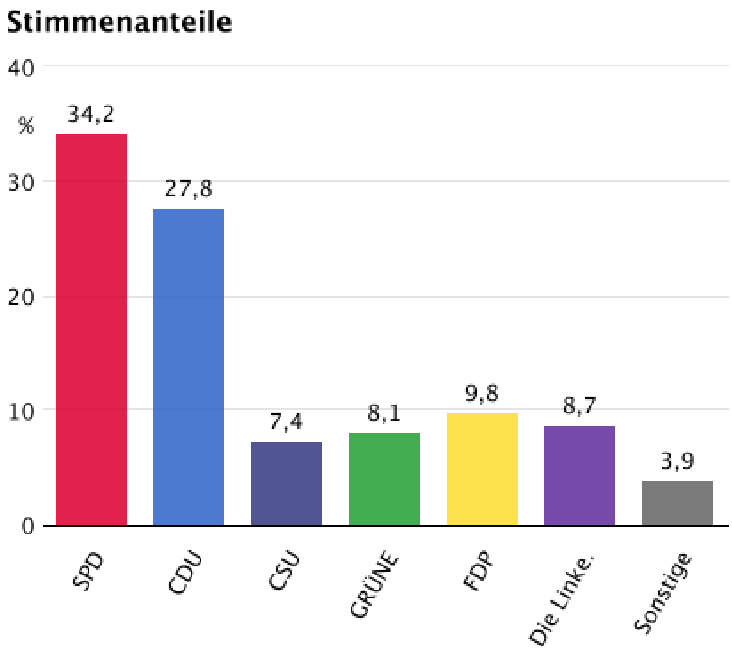
Übungen zur Vorlesung Statistik II
für Studierende der Soziologie und Magisterstudierende

Prof. Dr. Thomas Augustin
Christiane Dargatz

Blatt 7

Aufgabe 1

Bei der Bundestagswahl 2005 ergab sich folgendes Endergebnis:



Quelle: `http://www.bundeswahlleiter.de`

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer repräsentativen Stichprobe von 1000 Wählern mindestens 694 Anhänger der großen Koalition (SPD/CDU/CSU) zu erhalten (Lösung mit Stetigkeitskorrektur)?

(b) Wie viele Personen hätte man mindestens befragen müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens 69% Anhänger der großen Koalition in der Stichprobe zu erhalten? Welche praktischen Konsequenzen sind aus diesem Ergebnis zu ziehen (Lösung ohne Stetigkeitskorrektur, weil sonst die Rechnung zu kompliziert wird)?

Aufgabe 2

Wie vergleicht man Punktschätzungen? Gib eine anschauliche Erklärung der Begriffe Erwartungstreue und Effizienz!

Aufgabe 3

Beschreibe das Prinzip der Maximum-Likelihood-Schätzung in Worten!

Aufgabe 4

Eine Münze wird n-mal unabhängig geworfen. Das i-te Experiment wird durch die Zufallsvariable X_i beschrieben mit $\{X_i = 1\} \mathrel{\widehat{=}}$ "Kopf" und $\{X_i = 0\} \mathrel{\widehat{=}}$ "Zahl". Es gilt $P(X_i = 1) = p$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Zu schätzen ist p. Eine naheliegende Schätzfunktion ist das arithmetische Mittel der Beobachtungen, d.h. $T_a = \bar{X}_n$. Alternativ könnte man auch das Mittel aus der ersten und der letzten Realisierung verwenden, d.h. $T_b = 0.5(X_1 + X_n)$.

(a) Zeige die Erwartungstreue der beiden Schätzfunktionen T_a und T_b.

(b) Welche Schätzfunktion würdest Du bevorzugen (verbale Begründung und Rechnung)?

Aufgabe 5

Die Wartezeit (in Minuten) bis zum ersten Tor in einem Fußballspiel wird als zufällig angenommen. Als Modell für die Wartezeit auf das Tor betrachtet man die Zufallsvariable X, von der angenommen wird, dass sie *exponentialverteilt* ist mit Parameter $\lambda > 0$, formal $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. X hat die Dichte $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ und Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ für $x \geq 0$.

(a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der regulären Spielzeit (90 Minuten) kein Tor fällt, falls $\lambda = 0.02$ ist!

Nun betrachte man drei Fußballspiele, wobei die Wartezeiten auf die jeweils ersten Tore pro Spiel durch die drei Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 beschrieben werden.

(b) Wie sieht die gemeinsame Dichte $f_\lambda(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i)$ von X_1, X_2 und X_3 aus unter der Annahme, dass die Zufallsvariablen unabhängig und identisch verteilt sind?

(c) Finde den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$ zu den Realisierungen (in Minuten) $x_1 = 30, x_2 = 85, x_3 = 62$!

(d) Wie lautet der Maximum-Likelihood-Schätzer bei n Beobachtungen $x_1, ..., x_n$?