Übungen zur Vorlesung Statistik II
für Studierende der Soziologie und Magisterstudierende

Prof. Dr. Thomas Augustin
Christiane Dargatz

Blatt 6

Aufgabe 1

Betrachtet werde folgendes Wettspiel für zwei Spieler ("*Bank*" und "*Wettender*") auf das Eintreten eines Ereignisses A:

Die Bank erhält vom Wettenden den Einsatz e. Tritt A ein, so muss die Bank 1 Euro bezahlen; tritt A nicht ein, so geht der Wettende leer aus.

Sei π die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A.

(a) Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen
X: Gewinn des Wettenden,
Y: Gewinn der Bank.

(b) Ermittle diejenigen Einsätze e, bei denen es vorteilhaft ist, Bank (Spieler) zu sein.

(c) ("Wettinterpretation von Wahrscheinlichkeiten") Wie kann das vorliegende Modell zur Interpretation der Wahrscheinlichkeit π verwendet werden?

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen $X_i, i = 1, ..., n$, seien unabhängig identisch normalverteilt mit $\mu = 1$ und $\sigma = 2$. Sind folgende Zufallsvariablen auch normalverteilt?

- $Z = \dfrac{X_1 - \mu}{\sigma}$
- $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $W = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
- $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Aufgabe 3

Das Gewicht von Zuckerpaketen sei normalverteilt mit $\mu = 1000$ Gramm und $\sigma = 12$ Gramm.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gewicht eines Zuckerpakets mindestens 996 Gramm und höchstens 1004 Gramm beträgt?

Angenommen, man hat 9 Zuckerpakete und ist interessiert an dem durchschnittlichen Gewicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das durchschnittliche Gewicht mindestens 996 Gramm und höchstens 1004 Gramm beträgt?

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen $X_i, i = 1, ..., n$, seien unabhängig identisch normalverteilt mit $\mu_{X_i} = 0$ und $\sigma^2_{X_i} = 1$. Nun definiere man die Zufallsvariable $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ mit $\mu_{\bar{X}_n} = 0$ und $\sigma^2_{\bar{X}_n} = \frac{1}{n}$ (vgl. Aufgabe 2).

(a) Skizziere die Dichte von $\bar{X}_n$ für verschiedene Werte von n.

(b) Betrachte Intervalle der Art $[\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\ \mu_{\bar{X}_n} + c]$! Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für $\bar{X}_n \in [\mu_{\bar{X}_n} - c\,,\ \mu_{\bar{X}_n} + c]$ in Abhängigkeit von n?

Aufgabe 5

- Formuliere das (schwache) Gesetz der großen Zahlen und interpretiere es anschaulich.
- Formuliere den Hauptsatz der Statistik und interpretiere ihn anschaulich.
- Wie lautet der zentrale Grenzwertsatz? Worin liegt seine praktische Bedeutung?