Übungen zur Vorlesung Statistik II
für Studierende der Soziologie und Magisterstudierende

Prof. Dr. Thomas Augustin
Christiane Dargatz

Blatt 5

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x < -c \text{ oder } x > c \\ a & \text{, sonst} \end{cases}$$

mit $c > 0$.

- Wie ist a in Abhängigkeit von c zu wählen, damit es sich bei $f(x)$ um eine Dichte handelt?
- Sei $c = 1$. Skizziere die Dichte und die Verteilungsfunktion von X.
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Mengen und kennzeichne sie in den Skizzen der Dichte und Verteilungsfunktion:

  (a) $\{X \geq 0\}$,
  (b) $\{X < -0.5\}$,
  (c) $\{-0.5 \leq X \leq 0.5\}$,
  (d) $\{X > 0.75\}$.

Aufgabe 2

(a) Interpretiere folgende Formeln zur Analyse von Lebensdauern:

- $P(t \leq T \leq t + h \,|\, T \geq t)$
- $\lambda(t) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{P(t \leq T \leq t + h \,|\, T \geq t)}{h}$.

(b) Eine Zufallsvariable T mit Parameter $\lambda > 0$ und Dichte $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ für $t \geq 0$ heißt *exponentialverteilt*, Kurzform: $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

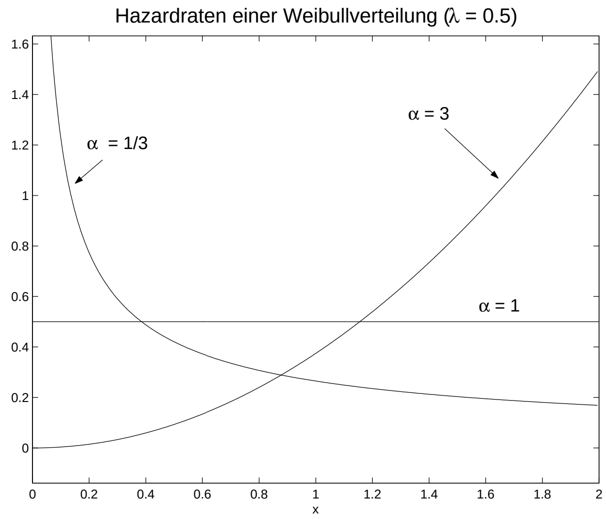
- Zeige, dass es sich bei $f(t)$ um eine Dichte handelt.
- Berechne und interpretiere die Hazardrate!

(c) Eine Zufallsvariable T heißt *weibullverteilt* mit Parametern $\lambda > 0, \alpha > 0$, falls ihre Dichte für $t \geq 0$ folgende Gestalt hat:

$$f(t) = \lambda\alpha(\lambda t)^{\alpha-1} \exp(-(\lambda t)^{\alpha}).$$

Die Survivorfunktion von T lautet $S(t) = \exp(-(\lambda t)^{\alpha})\,, t \geq 0$.

- Bestimme daraus die Hazardrate von T! Welcher Spezialfall ergibt sich für $\alpha = 1$?
- Betrachte die Hazardraten für $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ und $\alpha > 1$.



Zur Modellierung welcher Situationen sind die verschiedenen Verläufe der Hazardrate $\lambda(t)$ geeignet?

(d) Angenommen, wir haben Daten über die Dauer von Arbeitslosigkeit bis zum Wiedereinstieg in den Beruf.

- Was bedeuten die in (a) aufgeführten Größen in diesem Beispiel?
- Lässt sich dieses Beispiel auch mit einem Markovmodell modellieren? Was wären hier die relevanten Größen?

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X sei standardnormalverteilt.

- Skizziere die Dichte und die Verteilungsfunktion.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die Menge $\{X < 1.96\}$ aus der Tabelle.
- Wie findet man grafisch anhand der Dichte bzw. anhand der Verteilungsfunktion die gesuchte Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 4

Wie in Aufgabe 1 von Blatt 3 kennen wir folgende Verteilung der Lieblingsjoghurtsorten in einer Grundgesamtheit:

Erdbeer	20%
Himbeer	15%
Pfirsich-Maracuja	30%
sonstige	35%.

Wieder wählen wir zufällig acht Personen. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Binomialmodells:

(a) P(mindestens 7 Befragte geben “Pfirsich-Maracuja” an),

(b) P(alle 8 Befragten geben “Erdbeer” an),

(c) P(niemand gibt “Erdbeer” an),

(d) P(genau 6 Befragte geben “Himbeer” an).