Übungen zur Vorlesung Statistik II für Studierende der Soziologie und Magisterstudierende

Prof. Dr. Thomas Augustin
Christiane Dargatz

Blatt 4

Aufgabe 1

Eine Bank setzt ein Verfahren zur Kreditwürdigkeitsprüfung ein. Dies soll sicherstellen, dass nur Kunden einen Kredit erhalten, die den Kredit auch zurückzahlen. Der Anteil der 'schlechten Kunden' betrage nach langjähriger Erfahrungen 3%. Das Prüfungsverfahren führt bei 90% der 'schlechten Kunden' zu einer Ablehnung des Kreditantrags. Leider wird durch das Prüfungsverfahren aber auch in 10% der Fälle bei den 'guten Kunden' der Kreditantrag abgelehnt.

- Welche Wahrscheinlichkeiten sind unbedingt bzw. bedingt?
- Zeichnen Sie einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsbaum.
- Berechnen Sie die Wahrscheinichkeit dafür, dass ein Kreditnehmer, bei dem das Prüfverfahren zu einem negativen Ergebnis kommt, tatsächlich ein 'schlechter Kunde' ist.

Aufgabe 2

Die Studentenberatung einer kleinen Universität hat eine Person für die Beratung. Die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 5 Minuten genau ein Student eintrifft und eine Beratung möchte, sei 0.6. Es kommen nie zwei Studenten innerhalb von 5 Minuten (weil immer nur einer in den Aufzug passt o.Ä.). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beratung innerhalb von 5 Minuten beendet ist, betrage 0.5. Falls die Warteschlange (inklusive der Person, die gerade beraten wird) bereits zwei Personen umfasst, verzichten weitere Hilfesuchende auf eine Beratung, verlassen sofort die Beratungsstelle und werden nicht mitgezählt.

- Lässt sich die Anzahl der Personen in der Warteschlange mit einem homogenen Markovmodell modellieren?
  - Der Zustand a_1 bedeute, dass niemand wartet. Beschreibe die anderen Zustände!
  - Was ist als Zeitskala zu wählen?
- Betrachte folgende Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten und berechne die fehlenden Wahrscheinlickeiten. Interpretiere einige Wahrscheinlichkeiten.

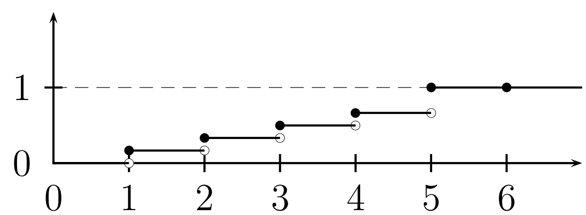
?	0.6	0
0.2	?	0.3
0	?	0.5

- Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(A_{i+2,\text{"2 Wartende"}}|A_{i,\text{"0 Wartende"}})$

Aufgabe 3

Man betrachtet als Zufallsexperiment den einfachen Würfelwurf mit einem fairen Würfel, d.h. die Augenzahlen sind jeweils gleichwahrscheinlich. Der Ausgang des Experiments werde durch die Zufallsvariable X beschrieben.

- Wie lautet der Träger von X?
- Korrigiere folgende falsche Verteilungsfunktion von X!



- Wie könnte man die Verteilung von X noch grafisch darstellen?
- Beschreibe verbal folgende Mengen/Ereignisse und gib auch ihre Wahrscheinlichkeiten an!
  (a) $\{X \leq 3\}, \{X < 3\}, \{X \leq 3.5\}, \{X < 3.5\}$
  (b) $\{2 \leq X \leq 5\}$
  (c) $\{X = 2\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 6\}$

Aufgabe 4

Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem Werfen einer Münze mit $\Omega = \{\text{'Kopf'}, \text{'Zahl'}\}$. Das Experiment wird durch die Zufallsgröße X beschrieben mit

$\{X = 1\} = \text{'Kopf'}, \quad P(\{X = 1\}) = p,$
$\{X = 0\} = \text{'Zahl'}, \quad P(\{X = 0\}) = 1 - p.$

Nun werde die Münze unabhängig viermal hintereinander geworfen, wobei der i-te Wurf durch die Zufallsvariable X_i, $i = 1, ..., 4$ beschrieben wird. Die Zufallsvariable Z wird definiert als $Z := \sum_{i=1}^{4} X_i$.

- Interpretiere die Zufallsvariable Z!
- Welche Werte kann Z mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(\{Z = 0\})$, $P(\{Z = 1\})$, $P(\{Z = 4\})$.

Aufgabe 5

Betrachte folgende 'Rechenregeln' für den Erwartungswert und die Varianz von zwei Zufallsvariablen X und Y. Welche Regeln sind richtig bzw. unter welchen Bedingungen sind sie korrekt?

- $\mathbb{E}(X + a) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(Y + X) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X - Y) \stackrel{?}{=} 0$
- $\mathrm{Var}(X + Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
- $\mathrm{Var}(X - Y) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$
- $\mathbb{E}(X^2) \stackrel{?}{=} \mathrm{Var}(X)$
- $\mathrm{Var}(aX) \stackrel{?}{=} a\,\mathrm{Var}(X)$

Aufgabe 6

Eine Zufallsvariable X nimmt die Werte 1 und -1 jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 an. Nun wird die Zufallsvariable Y definiert als $Y := 3 + 2 \cdot X$.

- Wie sieht die Verteilung von Y aus?
- Bestimme Erwartungswert und Varianz von X und Y.